Универзитет у Крагујевцу
Факултет техничких наука у Чачку
Основне академске студије
01.07.2024. године

Пријемни испит из

МАТЕМАТИКЕ

1. Израчунати вредност израза:

$$\frac{((-12)^{-8})^{-2}\cdot 75^{-4}\cdot(-4)^{-9}}{(25^{-2})^4\cdot 18^6\cdot 10^4}.$$

Решење:

Задати бројни израз можемо написати на следећи начин:

$$\frac{((-12)^{-8})^{-2}\cdot 75^{-4}\cdot(-4)^{-9}}{(25^{-2})^4\cdot 18^6\cdot 10^4}=\frac{(-2^2\cdot 3)^{16}\cdot(3\cdot 5^2)^{-4}\cdot(-2^2)^{-9}}{(5^2)^{-8}\cdot(2\cdot 3^2)^6\cdot(2\cdot 5)^4}$$

$$=\frac{(-1)^{16}\cdot 2^{32}\cdot 3^{16}\cdot 3^{-4}\cdot 5^{-8}\cdot(-1)^{-9}\cdot 2^{-18}}{5^{-16}\cdot 2^6\cdot 3^{12}\cdot 2^4\cdot 5^4}$$

$$=\frac{(-1)^7\cdot 2^{14}\cdot 3^{12}\cdot 5^{-8}}{2^{10}\cdot 3^{12}\cdot 5^{-12}}=-2^4\cdot 3^0\cdot 5^4=-(2\cdot 5)^4$$

$$=-10^4=-10000.$$

2. Решити једначину:

$$\sqrt{3x+4}=2\sqrt{x}-\sqrt{x-4}.$$

Решење:

Дата једначина има смисла ако је $x\geq 4$. Квадрирањем

$$\sqrt{3x+4}=2\sqrt{x}-\sqrt{x-4}$$

добија се једначина

$$3x+4=4x-4\sqrt{x^2-4x}+x-4,$$

односно

$$x-4=2\sqrt{x^2-4x}.$$

Поновним квадрирањем добијамо једначину

$$x^2 - 8x + 16 = 4x^2 - 16x,$$

односно

$$3x^2 - 8x - 16 = 0.$$

Решења ове једначине су $x = 4$ или $x = -\frac{4}{3}$. Провером утврђујемо да $x = 4$ задовољава почетни услов $x \geq 4$, па закључујемо да $x = 4$ јесте решење полазне једначине.

3. Решити једначину:

$$3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}.$$

Решење:

Једначину можемо представити у облику

$$3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^x \cdot 81 = 6 \cdot 4^x \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 9^x \cdot 9,$$

односно

$$3 \cdot 4^x - 24 \cdot 4^x = -\frac{9}{2} \cdot 9^x - 27 \cdot 9^x.$$

Одавде је

$$-21 \cdot 4^x = -\frac{63}{2} \cdot 9^x,$$

односно $\left(\dfrac{4}{9}\right)^x = \dfrac{3}{2}$, па је решење ове једначине $x = -\dfrac{1}{2}$.

4. Решити једначину

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0.$$

Решење:

На леву страну једначине применимо формуле за трансформацију збира тригонометријских функција у производ на следећи начин:

$$\begin{aligned}
&\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = (\sin x + \sin 2x) + (\sin 3x + \sin 4x) \\
&= 2 \sin \frac{x + 2x}{2} \cos \frac{x - 2x}{2} + 2 \sin \frac{3x + 4x}{2} \cos \frac{3x - 4x}{2} \\
&= 2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{7x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \cos \frac{x}{2} \left(\sin \frac{3x}{2} + \sin \frac{7x}{2} \right) \\
&= 2 \cos \frac{x}{2} \left(2 \sin \frac{\frac{3x}{2} + \frac{7x}{2}}{2} \cos \frac{\frac{3x}{2} - \frac{7x}{2}}{2} \right) = 4 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{5x}{2} \cos x.
\end{aligned}$$

Дату једначину можемо записати у облику

$$4\cos\frac{x}{2}\sin\frac{5x}{2}\cos x = 0,$$

па је $\cos\frac{x}{2} = 0$ или $\sin\frac{5x}{2} = 0$ или $\cos x = 0$, односно $x = \pi + 2k\pi$ или $x = \frac{2k\pi}{5}$ или $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, за $k \in \mathbf{Z}$.

5. Одредити вредност параметра m тако да права $2x - y + 3 = 0$ буде нормална на праву $(2m-1)x + (m+1)y - 2 = 0$.

Решење:

Како праве треба да су узајамно нормалне, производ њихових коефицијената мора бити једнак -1. Напишимо праву $(2m-1)x + (m+1)y - 2 = 0$ у експлицитном облику. Важи да је

$$(m+1)y = -(2m-1)x + 2,$$

односно

$$y = -\frac{2m-1}{m+1}x + \frac{2}{m+1}.$$

Такође, праву $2x - y + 3 = 0$ напишимо у експлицитном облику $y = 2x + 3$. На основу експлицитних облика правих, можемо закључити да су им коефицијенти праваца $k_1 = 2$ и $k_2 = -\frac{2m-1}{m+1}$. Њиховим множењем, добијамо једначину

$$-\frac{2m-1}{m+1} \cdot 2 = -1 \quad / \cdot (m+1) \neq 0.$$

Коначно добијамо

$$(-2m+1) \cdot 2 = -1 \cdot (m+1),$$

односно

$$-4m + 2 = -m - 1,$$

одакле је $m = 1$.

6. Наћи пети члан развоја бинома $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ ако је однос коефицијената трећег и другог члана једнак $\frac{7}{2}$.

Решење:

Како је однос коефицијената трећег и другог члана биномног развоја једнак $\frac{7}{2}$, то важи да је

$$\frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{1}} = \frac{7}{2},$$

односно
$$\frac{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}{\frac{n}{1}}=\frac{n-1}{2}=\frac{7}{2}.$$
Добијамо да је $n-1=7$, тј. $n=8$.

Пети члан развоја бинома једнак је
$$\binom{8}{4}\left(\sqrt{x}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2}=70.$$